

حساب فازی

عدم قطعیت هایی که فازی مدل می نماید:

- هنگامی که معیار یا مرز مشخص و روشنی برای تعریف یک مجموعه از عناصر و اشیاء وجود نداشته باشد: دمای بالا، فشار متوسط، مرد جوان
- در جایکه ابهام وجود دارد (اطلاعات ناکافی): گستره و بازه مقادیر پارامتر مدل شناخته شده است ولی اطلاعی از مقدار دقیق آن در بازه مذکور در دست نیست. به عبارت دیگر در بازه انتخاب مقدار پارامتر از آن بازه، عدم قطعیت وجود دارد.
- در هنگام ساده سازی یک سیستم پیچیده عدم قطعیت بوجود می آید

مثالهایی از حساب فازی :

مثال: نمایش مجموعه فازی دمای بالا (کمیت فازی)

$$U = \{0, 1, 2, \dots, 110\}$$

$$A = \text{high temperature} = \{(80, 0), (85, 0.25), (90, 0.5), (95, 0.75), (100, 1), (105, 1), (110, 1)\}$$

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x)}{x}$$

$$A = \text{hightemperature} = \left\{ \frac{0}{80} + \frac{.025}{85} + \frac{0.5}{90} + \frac{0.75}{95} + \frac{1}{100} + \frac{1}{105} + \frac{1}{110} \right\}$$

اگر بخواهیم به صورت پیوسته نشان دهیم:

$$A = \int \frac{\mu_A(x)}{x}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-80}{20} & 80 \leq x \leq 100 \\ 1 & 100 \leq x \leq 110 \end{cases}$$

حال اگر بخواهیم جذر A را با استفاده از اصل گسترش برای عملگر یک بُعدی $f(x)=\sqrt{x}$ بدست آوریم:

$$\sqrt{A} = \left\{ \frac{0}{\sqrt{80}} + \frac{.025}{\sqrt{85}} + \frac{0.5}{\sqrt{90}} + \frac{0.75}{\sqrt{95}} + \frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{105}} + \frac{1}{\sqrt{110}} \right\}$$

مثال: مجذور کمیت فازی زیر را بدست آورید:

$$B = \left\{ \begin{array}{c} \frac{.25}{-1.5} + \frac{.5}{-1} + \frac{.6}{-0.5} + \frac{1}{0} + \frac{.2}{0.5} + \frac{.3}{1} + \frac{.4}{1.5} + \frac{.5}{2} + \frac{.6}{2.5} + \frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

$$\mu_{B^2}(2.25) = \max[\mu_B(-1.5^2), \mu_B(1.5^2)] = \max[.25, .4] = .4$$

$$\mu_{B^2}(1) = \max[\mu_B(-1^2), \mu_B(1^2)] = \max[.5, .3] = .5$$

$$\mu_{B^2}(.25) = \max[\mu_B(-0.5^2), \mu_B(0.5^2)] = \max[.6, .2] = .6$$

$$\mu_{B^2}(0) = \max[\mu_B(0^2)] = \max[1] = 1$$

$$\mu_{B^2}(4) = \max[\mu_B(2^2)] = \max[.5] = .5$$

$$\mu_{B^2}(6.25) = \max[\mu_B(2.5^2)] = \max[.6] = .6$$

$$\mu_{B^2}(9) = \max[\mu_B(3^2)] = \max[.75] = .75$$

$$B^2 = \left\{ \frac{1}{0} + \frac{.6}{0.25} + \frac{.5}{1} + \frac{.4}{2.25} + \frac{.5}{4} + \frac{.6}{6.25} + \frac{.75}{9} \right\}$$

مثال: جمع دوفازی A و B به صورت زیر را حساب نمایید.

$$A = \langle 1, 3, 4 \rangle_{TFN} = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ 4-x & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$B = \langle 3, 8, 10 \rangle_{TFN} = \begin{cases} \frac{x-3}{5} & 3 \leq x \leq 8 \\ \frac{10-x}{2} & 8 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

جمع این دو عدد فازی از روش α برش محاسبه می کنیم.

برای A:

$$\frac{x-1}{2} = \alpha \rightarrow x = 2\alpha + 1$$

$$4-x = \alpha \rightarrow x = 4-\alpha$$

$$A_\alpha = [2\alpha + 1, 4 - \alpha]$$

برای B:

$$\frac{x-3}{5} = \alpha \rightarrow x = 5\alpha + 3$$

$$\frac{10-x}{2} = \alpha \rightarrow x = 10 - 2\alpha$$

$$B_\alpha = [5\alpha + 3, 10 - 2\alpha]$$

حال دوباره A_α و B_α طبق جمع بازه ها جمع می نماییم.

$$A_\alpha + B_\alpha = [(2\alpha + 1) + (5\alpha + 3), (4 - \alpha) + (10 - 2\alpha)]$$

$$A_\alpha + B_\alpha = [7\alpha + 4, 14 - 3\alpha]$$

با بدست آوردن α بر حسب x از بازه بالا تابع عضویت عدد فازی $C=A+B$ تعیین می شود:

$$C_\alpha = A_\alpha + B_\alpha$$

$$7\alpha + 4 = x \rightarrow \alpha = \frac{x-4}{7}$$

$$14 - 3\alpha = x \rightarrow \alpha = \frac{14-x}{3}$$

$$C = \begin{cases} \frac{x-4}{7} & 4 \leq x \leq 11 \\ \frac{14-x}{3} & 11 \leq x \leq 14 \end{cases}$$

مثال: تفریق دو عدد فازی مثال قبل ($C=B-A$) را محاسبه نمایید.

$$A_\alpha = [2\alpha + 1, 4 - \alpha]$$

$$B_\alpha = [5\alpha + 3, 10 - 2\alpha]$$

$$-A_\alpha = [\alpha - 4, -2\alpha - 1]$$

$$-A = \begin{cases} x+4 & -4 \leq x \leq -3 \\ \frac{-1-x}{2} & -3 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

$$C_\alpha = B_\alpha - A_\alpha$$

$$C_\alpha = [(5\alpha + 3) + (\alpha - 4), (10 - 2\alpha) + (-2\alpha - 1)]$$

$$C_\alpha = [6\alpha - 1, 9 - 4\alpha]$$

با بدست آوردن α ، تفریق دو عدد فازی حاصل خواهد شد.

$$6\alpha - 1 = x \rightarrow \alpha = \frac{x+1}{6}$$

$$9 - 4\alpha = x \rightarrow \alpha = \frac{9-x}{4}$$

$$C = B - A = \begin{cases} \frac{x+1}{6} & -1 \leq x \leq 5 \\ \frac{9-x}{4} & 5 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

مثال ضرب دو عدد فازی مثال قبل را محاسبه نمایید.

چون دو عدد فازی دامنه اعداد حقیقی مثبت دارند ضرب شان ساده می باشد و کران های پایین باهم و کرانهای بالا هم باهم ضرب خواهند شد.

$$A_\alpha = [2\alpha + 1, 4 - \alpha]$$

$$B_\alpha = [5\alpha + 3, 10 - 2\alpha]$$

$$C_\alpha = A_\alpha \cdot B_\alpha = [2\alpha + 1, 4 - \alpha] \cdot [5\alpha + 3, 10 - 2\alpha]$$

$$C_\alpha = A_\alpha \cdot B_\alpha = [(2\alpha + 1) \cdot (5\alpha + 3), (4 - \alpha) \cdot (10 - 2\alpha)]$$

$$C_\alpha = A_\alpha \cdot B_\alpha = [10\alpha^2 + 11\alpha + 3, 2\alpha^2 - 18\alpha + 40]$$

با حل معادله درجه دو و بدست آوردن α رابطه حاصلضرب محاسبه خواهد شد.
حاصلضرب دو عدد مثلثی دیگر یک عدد مثلثی نیست.

مثال: تقسیم دو عدد فازی $C=B/A$ را بدست آورید.

$$A_\alpha = [2\alpha + 1, 4 - \alpha]$$

$$B_\alpha = [5\alpha + 3, 10 - 2\alpha]$$

$$C_\alpha = B_\alpha / A_\alpha = [5\alpha + 3, 10 - 2\alpha] / [2\alpha + 1, 4 - \alpha]$$

$$C_\alpha = \left[\frac{(5\alpha + 3)}{(4 - \alpha)}, \frac{(10 - 2\alpha)}{(2\alpha + 1)} \right]$$

با بدست آوردن α خواهیم داشت:

$$\frac{(5\alpha + 3)}{(4 - \alpha)} = x \rightarrow \alpha = \frac{4x - 3}{x + 5}$$

$$\frac{(10 - 2\alpha)}{(2\alpha + 1)} = x \rightarrow \alpha = \frac{10 - x}{2x + 2}$$

$$C = B / A = \begin{cases} \frac{4x - 3}{x + 5} & \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{8}{3} \\ \frac{10 - x}{2x + 2} & \frac{8}{3} \leq x \leq 10 \end{cases}$$

هنگامیکه دامنه اعداد فازی شامل اعداد حقیقی مثبت و منفی باشد انجام عملیات جبری غیرخطی پیچیده تر می شود که نمونه ای از آن در مثال زیر نشان داده شده است.
مثال ضرب اعداد فازی زیر را بدست آورید.

$$A = \langle -4, -2, 2 \rangle \quad B = \langle -3, 1, 3 \rangle$$

$$A_\alpha = [2\alpha - 4, 2 - 4\alpha] \quad B_\alpha = [4\alpha - 3, 3 - 2\alpha]$$

با بررسی مقادیر α یا از روی شکل مشخص می شود ه وضعیت ضرب بازه ها برای حالت های زیر متفاوت است:
 $0 \leq \alpha \leq 0.5 \rightarrow 2\alpha - 4 \leq 0 \leq 2 - 4\alpha$,
 $\rightarrow 4\alpha - 3 \leq 0 \leq 3 - 2\alpha$

$$A_\alpha . B_\alpha = \left[\min((2\alpha - 4).(3 - 2\alpha), (2\alpha - 4).(4\alpha - 3)), \max((2\alpha - 4).(4\alpha - 3), (2\alpha - 4).(3 - 2\alpha)) \right]$$

$$A_\alpha . B_\alpha = [(2\alpha - 4).(3 - 2\alpha), (2\alpha - 4).(4\alpha - 3)]$$

$0.5 \leq \alpha \leq 0.75 \rightarrow 2\alpha - 4 \leq 2 - 4\alpha \leq 0$,
 $\rightarrow 4\alpha - 3 \leq 0 \leq 3 - 2\alpha$

$$A_\alpha . B_\alpha = [(2\alpha - 4).(3 - 2\alpha), (2\alpha - 4).(4\alpha - 3)]$$

$$0.75 \leq \alpha \leq 1 \rightarrow 2\alpha - 4 \leq 2 - 4\alpha \leq 0 ,$$

$$\rightarrow 0 \leq 4\alpha - 3 \leq 3 - 2\alpha$$

$$A_\alpha . B_\alpha = [(2\alpha - 4).(3 - 2\alpha), (2 - 4\alpha).(4\alpha - 3)]$$

در پایان با ترکیب بازه های فوق و حل معادلات درجه دو برای α تابع عضویت حاصل ضرب بدست می آید.

مثال: جمع دوبازه فازی زیر را بدست آورید؟

بازه فازی با تابع عضویت دوزنقه ای نشان داده می شود.

$$P = \langle a_1, b_1, \gamma_1, \lambda_1 \rangle$$

$$Q = \langle a_2, b_2, \gamma_2, \lambda_2 \rangle$$

$$P + Q = \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2, \gamma_1 + \gamma_2, \lambda_1 + \lambda_2 \rangle$$

$$P = \langle 3, 5, 2.2, 1.6 \rangle$$

$$Q = \langle 1, 2, 1.5, 0.2 \rangle$$

$$P + Q = \langle 4, 7, 3.7, 1.8 \rangle$$

مثال: جمع دو عدد فازی که به صورت دیوا و پراد نمایش داده شده است محاسبه نمایید.

نحوه جبری دو عدد فازی که به صورت LR می باشد در اسلاید آمده در اینجا فقط با توجه به آن فرمولها محاسبه را نشان می دهیم.

$$A = \langle 5, 2.5, 4 \rangle_{LR} \quad B = \langle 7.5, 1.5, 2.25 \rangle_{LR}$$

$$A = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x-5}{2.5} \right)^2 \\ \sqrt{1 - \frac{x-5}{4}} \end{cases} \quad B = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x-7.5}{1.5} \right)^2 \\ \sqrt{1 - \frac{x-7.5}{2.25}} \end{cases}$$

$$A + B = \langle 12.5, 4, 6.25 \rangle_{LR}$$

$$A = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x-12.5}{4} \right)^2 \\ \sqrt{1 - \frac{x-12.5}{6.25}} \end{cases}$$

مثال: جمع دو عدد فازی به روش max-min convolution

For A (+) B

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0.1 & 0.5 & 0.9 & 1 & 0.6 & 0.2 \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0.2 & 0.3 & 1 & 0.8 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ \hline \end{array}$$

$$A (+) B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.9 & 1 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ \hline \end{array}$$

A \ B	0	1	2	3	4	5	6
0	0.2	0.3	1	0.8	0.7	0.1	0.1
1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
2	0.2	0.3	1	0.8	0.7	0.1	0.1
3	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
4	0.2	0.3	1	0.8	0.7	0.1	0.1
5	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
6	0.2	0.3	1	0.8	0.7	0.1	0.1
7	1	1	1	1	1	1	1
8	0.2	0.3	1	0.8	0.7	0.1	0.1
9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	0.2	0.3	1	0.8	0.7	0.1	0.1
11	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

(1.78)

مثال: تفریق دو عدد فازی به روش max-min convolution

For A (-) B

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0.1 & 0.5 & 0.9 & 1 & 0.6 & 0.2 \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0.2 & 0.3 & 1 & 0.8 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ \hline \end{array}$$

$$A (-) B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.5 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 0.6 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ \hline \end{array}$$

A \ B	0	1	2	3	4	5	6
0	0.2	0.3	1	0.8	0.7	0.1	0.1
1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
2	0.2	0.3	1	0.8	0.7	0.1	0.1
3	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
4	0.2	0.3	1	0.8	0.7	0.1	0.1
5	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
6	0.2	0.3	1	0.8	0.7	0.1	0.1
7	1	1	1	1	1	1	1
8	0.2	0.3	1	0.8	0.7	0.1	0.1
9	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
10	0.2	0.3	1	0.8	0.7	0.1	0.1
11	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2